MAY 7 1921

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. 15. März 1917. 18. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 7 am 24. März 1917.

INHALT:

Originalmitteilungen:
H. Lorenz, Theorie der Röhrenfedermanometer. S. 117.
A. Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung. S. 121.
M. Wolfke, Über Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten. S. 128.
K. Uller, Widersprüche gegen die Wellenkinematik; ihre Auflösungen. II. S. 130.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Theorie der Röhrenfedermanometer.

Von H. Lorenz.

Zur Messung des Druckes tropfbarer oder elastischer Flüssigkeiten bedient man sich in der Technik vorwiegend der von Bourdon vorgeschlagenen Röhrenfedermanometer. Deren wirksamer Bestandteil, die Röhrenfeder, ist ein dünnwandiges Metallrohr mit ovalem, bzw. nahezu elliptischem Querschnitt, welches ringförmig derart zusammengebogen ist, daß die großen Achsen des Meridianschnittes auf einem Kreiszylinder liegen (Fig. 1). Da der Ring nicht in

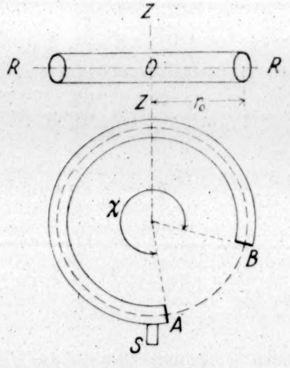

Fig. 1.

sich geschlossen ist, sondern nur einen Bogen $\chi \sim 270^0$ umfaßt, so sind die beiden Enden durch eingelötete Deckel verschlossen. In der Nähe des einen festgehaltenen Endes A trägt die Röhrenfeder einen Stutzen S zum Anschluß an das Gefäß, dessen Überdruck p gemessen werden soll. Das geschieht durch eine Aufblähung des Ringquerschnitts, die nicht nur einen für die Formänderungsarbeit grundlegenden Volumzuwachs, sondern auch infolge Hinausdrängens der äußeren und Hineindrückens der Innenfasern in bezug auf die Ringachse ZZ eine mit dem Drucke p zunehmende Aufbiegung desselben hervorruft. Diese wiederum bedingt eine Verschiebung des andern Rohrendes B, die auf einen Zeiger zum Ablesen an einer Skala oder auf ein Schreibzeug zur fortlaufenden Aufzeichnung übertragen wird.

Da das zur Bewegungsübertragung benutzte Getriebe ohne Schwierigkeiten so gestaltet werden kann, daß die Zeiger- und Schreibzeugangaben der Aufbiegung des freien Endes der Röhrenfeder proportional ausfallen, außerdem aber die Reibungswiderstände beliebig klein gehalten werden können, so dürfen wir uns mit der Theorie der Röhrenfeder allein begnügen. Für diese gehen wir von den Spannungen in einem in sich geschlossenen Ringrohr unter dem Innendrucke p aus, die ich meiner Arbeit über „die Biegung krummer Rohre" unmittelbar entnehme[1]). Es sind dies die Tangential- oder Ringspannung σ' und die Meridianspannung σ'', normal zu den Querschnitten durch

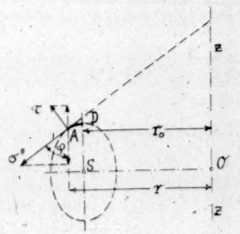

Fig. 2.

1) Diese Zeitschr. 13, 768, 1912. Vgl. auch H. Lorenz, Techn. Elastizitätslehre, 1913, S. 302.

die Rohrwand sowie eine in den Querschnitt selbst hineinfallende, auf σ' und σ'' senkrecht stehende Schubspannung τ (vgl. Fig. 2), alle Spannungen als Mittelwerte über die Wandstärke h verstanden. Von diesen ruft die Ringspannung Gl. (6) a. a. O.

$$\sigma' = \frac{p}{h}\varrho'\left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right) - \frac{1}{\varrho''}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1)$$

neben einem tangentialen Zug S vermöge ihrer ungleichen Verteilung über den Meridianschnitt das Moment M' hervor, welches die Röhrenfeder aufbiegt. Zu deren Berechnung beachten wir, daß die Krümmungsradien ϱ'' der Meridiankurve sowie ϱ' eines dazu normalen Hauptschnittes durch die Ringfläche für einen Punkt mit den Koordinaten r, z und dem Tangentialwinkel φ im Meridianschnitt durch

$$\frac{1}{\varrho''} = -\frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi, \quad \varrho' = \frac{r}{\cos\varphi} \qquad (2)$$

gegeben sind, während gleichzeitig mit dem Bogenelement ds der Meridiankurve

$$ds\cos\varphi = dz, \quad \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi = 1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2 \qquad (3)$$

ist. Damit folgt aus (1)

$$\sigma' = \frac{p}{h}\left(\frac{r}{\cos^2\varphi} + \frac{r^2 - r_0^2}{2}\frac{d^2 r}{dz^2}\right)\cos\varphi + \frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1a)$$

oder

$$\sigma' = \frac{p}{h}\left(r + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right]\right)\cos\varphi + \frac{d^2 r}{dz^2}\cos^3\varphi\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (1b)$$

und das Element der Zugkraft

$$dS = \sigma' h\,ds = pr\,dz + \frac{p}{2}d\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] - hd\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) \qquad (4)$$

dessen Integration über den ganzen Umfang der Meridiankurve unter Wegfall des zweiten und dritten Gliedes kurz

$$S = \int \sigma' h\,ds = p\int r\,dz = pF \qquad (4a)$$

ergibt, worin F die von der Meridiankurve eingeschlossene Fläche des Ringquerschnittes bedeutet. Mit dessen Schwerpunktsabstand r_0 von der Ringachse berechnet sich dann das Biegungsmoment

$$M' = \int r\,dS - S r_0 = \int (r - r_0)\,dS \qquad (5)$$

oder nach Einsetzen von (4) sowie wegen

$$r\,d\left[(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] = d\left[r(r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\right] - (r^2 - r_0^2)\frac{dr}{dz}\,dr \qquad (5a)$$

$$M' = p\int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz - h\int r\,d\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right). \qquad (5b)$$

Die Meridianspannung Gl. (5) a. a. O.

$$\sigma'' = \frac{p}{h}\frac{r^2 - r_0^2}{2r\cos\varphi} + \tau\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad (6)$$

hat nur eine Dehnung der Meridiankurve zur Folge, während die Schubspannung durch die Beziehung Gl. (4a) und (4b) a. a. O.

$$\tau r h \chi = \frac{dM''}{ds} \qquad (7)$$

das Moment M'' der Querbiegung infolge des Aufblähens der Röhrenfeder bestimmt. Soll deren Querschnitt entsprechend der Herleitung von Gl. (7) auch nach dieser Formänderung doppelt symmetrisch bleiben, so besitzt an den vier Scheiteln, d. h. für $\varphi = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ {}^3/_2\,\pi$ das Moment M'' ausgezeichnete Werte, denen dort ein Verschwinden von τr entspricht. Dieser Tatsache werden wir durch den Ansatz

$$\tau r = \cos\varphi(A_1\sin\varphi + A_3\sin 3\varphi + A_5\sin 5\varphi + \ldots) \qquad (8)$$

gerecht, der gleichzeitig eine bequeme Darstellung der in die Gl. (1) und (5a) eingehenden Ableitung von $\tau r : \cos\varphi$ erlaubt, während die Faktoren $A_1\ A_3 \ldots\ldots$ noch zu ermitteln sind. Wir wollen uns hierbei mit der ersten Annäherung

$$\tau r = A\cos\varphi\sin\varphi = \frac{A}{2}\sin 2\varphi \qquad (8a)$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\tau r}{\cos\varphi}\right) = A\cos\varphi \qquad (8b)$$

begnügen, worin offenbar A den Wert von

$$\tau r \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{4},$$

also an den Berührungsstellen des der Meridiankurve umschriebenen Quadrates bezeichnet. Mit (8a) folgt das Querbiegungsmoment aus (7) mit einer Abkürzung Φ

$$M'' = h\chi A\int\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,ds = h\chi A\,\Phi, \qquad (7a)$$

dem noch eine Biegungsspannung σ''' innerhalb der Wandstärke h und proportional dem Abstande y von der Wandmitte derart zugeordnet ist, daß mit dem Trägheitsmomente des ringförmigen Wandschnittes

$$\Theta'' = r\chi \frac{h^3}{12} \tag{9}$$

$$\sigma''' = \frac{M''y}{\Theta''} = \frac{12\,y\,A}{r h^2}\,\Phi \tag{10}$$

wird. Diese Spannung, deren Mittelwert über die ganze Wandstärke verschwindet, addiert sich algebraisch zu der Meridianspannung σ'', so daß mit der Querkontraktionszahl μ sowie dem Elastizitätsmodul E und Gleitmodul G

$$G = \frac{E}{2}\,\frac{\mu}{\mu+1} \tag{11}$$

für die Formänderungsarbeit

$$L = \frac{1}{2E}\int\left[\sigma'^2 + (\sigma'' + \sigma''')^2 - \frac{2\sigma'(\sigma''+\sigma''')}{\mu}\right]dV + \frac{1}{2G}\int \tau^2 dV \tag{12}$$

geschrieben werden kann. Setzen wir mit dem Abstand y eines Punktes der Rohrwand von deren Mittelfläche

$$dV = r\chi\, ds\, dy \tag{13}$$

für das Volumelement der Rohrwand, so liefert die Integration über y zwischen den Grenzen $\pm \frac{h}{2}$ wegen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'''\,dy = \frac{M''}{\Theta''}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\,dy = 0, \tag{10a}$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma'''^2\,dy = \frac{M''^2}{\Theta''^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy = \frac{M''^2 h^3}{12\,\Theta''^2} = \frac{12\,A^2\Phi^2}{r} \tag{10b}$$

sowie unter Beachtung, daß σ', σ'' und τ über die ganze Wandstärke h als konstant, d. h. von y unabhängig anzusehen sind,

$$L = \frac{\chi h}{2E}\int\left(\sigma'^2 + \sigma''^2 - \frac{2\sigma'\sigma''}{\mu}\right) r\,ds + \frac{\chi h}{2G}\int \tau^2 r\,ds + \frac{6\chi A^2}{Eh}\int\frac{\Phi^2 ds}{r}. \tag{12a}$$

Nach Einsetzen der Werte für die Spannungen, Ausschaltung von G durch Gl. (11) und Ordnen der Glieder wird daraus

$$\begin{aligned}\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\int\Bigg[&\varrho'^2\left(1 - \frac{r^2 - r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)^2 + \left(\frac{r^2-r_0^2}{2r\cos\varphi}\right)^2 \\ &- \frac{\varrho'}{\mu}\left(1 - \frac{r^2-r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)\frac{r^2-r_0^2}{r\cos\varphi}\Bigg]\,r\,ds \\ + 2Ap\int\Bigg[&\frac{r^2-r_0^2}{2r\cos\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r} - \frac{\cos\varphi}{\mu\varrho''}\right) \\ &- \left(1 - \frac{r^2-r_0^2}{2r\varrho''\cos\varphi}\right)\varrho'\left(\frac{\cos\varphi}{\varrho''} + \frac{\sin^2\varphi}{\mu r}\right)\Bigg]r\,ds \\ + A^2 h\int\Bigg[&\frac{\cos^2\varphi}{\varrho''^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2} \\ &- \frac{\sin^2\varphi}{\mu r}\left(\frac{2\cos\varphi}{\varrho''} - \frac{\cos^2\varphi}{r}\right)\Bigg]r\,ds + \frac{12\,A^2}{h}\int\frac{\Phi^2 ds}{r}\end{aligned} \tag{12b}$$

oder mit den sofort verständlichen Abkürzungen $C_1 C_2 C_3 C_4$ für die über den ganzen Umfang s zu erstreckenden Integrale

$$\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\cdot C_1 + 2pC_2A + \left(C_3 h + \frac{C_4}{h}\right)A^2. \tag{12c}$$

Die Stabilität des Gleichgewichts der gespannten Röhrenfeder bedingt nun, daß die Formänderungsarbeit ein Minimum ist, d. h.

$$\frac{E}{\chi}\frac{\partial L}{\partial A} = pC_2 + \left(C_3 h + \frac{C_4}{h}\right)A = 0 \tag{14}$$

woraus sich der noch unbekannte Faktor zu

$$A = -\frac{pC_2 h}{C_3 h^2 + C_4} \tag{14a}$$

bestimmt. Man erkennt weiterhin, daß er und damit auch die Schubspannung τ für $h = 0$ und $h = \infty$ verschwinden. Es heißt dies, daß eine unendlich dünne Haut keinen Widerstand gegen Biegung besitzt, während im andern Fall des vollen Balkens eine Querbiegung überhaupt ihren Sinn verliert.

Die Einführung von (14a) in (12c) ergibt dann

$$\frac{2EL}{\chi} = \frac{p^2}{h}\left(C_1 - \frac{C_2^2 h^2}{C_3 h^2 + C_4}\right), \tag{15}$$

während das Biegungsmoment M' nach Einführung von (8b) in (5b) durch

$$M' = p\int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2 - r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz - hA\int r\cos\varphi\, d\varphi \tag{5c}$$

gegeben ist. Schreiben wir darin

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi} r\cos\varphi\,d\varphi &= \int_0^{2\pi} r\,d\sin\varphi = -\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,dr \\ &= -\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,ds = -s_1 \\ \int\left[r^2 - r_0 r - \frac{r^2-r_0^2}{2}\left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]dz &= C_0,\end{aligned}\right| \tag{16}$$

so wird mit (14a)

$$M' = p\left(C_0 - \frac{C_2 s_1 h^2}{C_3 h^2 + C_4}\right). \tag{17}$$

Die Verdrehung der Federenden gegeneinander, welche ihrerseits mit der Änderung von χ übereinstimmt, ergibt sich aus der Formänderungsarbeit durch Differentiation nach M', also

$$\Delta\chi = \frac{\partial L}{\partial M'} = \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial M'}$$

oder wegen (15) und (17)

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = \frac{p}{E h}\frac{C_1(C_3 h^2 + C_4) - C_2^2 h^2}{C_0(C_3 h^2 + C_4) - C_2 s_1 h^2}. \qquad (18)$$

Hiernach ist die Verdrehung $\Delta\chi$ dem Überdrucke p in der Röhrenfeder direkt proportional, womit deren Verwendung als Meßvorrichtung gerechtfertigt erscheint. Dagegen läßt sich die Abhängigkeit der Verdrehung von der Wandstärke infolge der verwickelten Form der Größen C, d. h. der in (12b) und (5c) auftretenden bestimmten Integrale nicht gut übersehen. Wir wollen daher zum Vergleich mit der Erfahrung noch eine Näherungslösung unter alleiniger Berücksichtigung der Biegungsmomente M' und M'' ableiten, deren ersterem das Trägheitsmoment der Meridianellipse von der Bogenlänge s und dem Trägheitshalbmesser k in bezug auf die große Achse, also

$$\Theta' = s h k^2 \qquad (19)$$

zugeordnet ist, während für die Querbiegung Gl. (9) bestehen bleibt. Alsdann ist die Formänderungsarbeit L gegeben durch

$$2 E L = \int \frac{M'^2 r_0\, d\chi}{\Theta'} + \int \frac{M''^2 ds}{\Theta''}, \qquad (20)$$

worin wir nach (5c) und (16)

$$M' = p C_0 + A h s_1, \qquad (21)$$

und mit (7a) und (9) sowie einer Konstanten C

$$\int \frac{M''^2 ds}{\Theta''} = \frac{A^2}{h}\chi\, 12 \int \frac{\Phi^2 ds}{r} = \frac{A^2}{h}\chi r_0 C \qquad (22)$$

schreiben dürfen. Damit wird die Formänderungsarbeit

$$2 E L = \frac{r_0 \chi}{\Theta'}[p^2 C_0^2 + 2 p C_0 h s_1 A + A^2(h^2 s_1^2 + C s k^2)], \qquad (23)$$

und die Bedingung für ihr Minimum ergibt

$$E\frac{\partial L}{\partial A} = \frac{r_0\chi}{\Theta'}[p C_0 h s_1 + A(h^2 s_1^2 + C s k^2)] = 0 \qquad (24)$$

woraus dann nach Ausschaltung von A

$$L = \frac{p^2 C_0^2 r_0 \chi}{2 E \Theta'}\left(1 - \frac{h^2 s_1^2}{h^2 s_1^2 + C s k^2}\right) \qquad (20a)$$

$$M' = p C_0\left(1 - \frac{h^2 s_1^2}{h^2 s_1^2 + C s h^2}\right) \qquad (21a)$$

und endlich

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = \frac{1}{\chi}\frac{\partial L}{\partial M'} = \frac{p C_0 r_0}{E\Theta'} = \frac{p}{\Theta h}\frac{C_0 r_0}{s k^2} \qquad (25)$$

folgt. Dieses Ergebnis können wir uns auch aus (18) dadurch hervorgegangen denken, daß dort im Zähler und Nenner des Bruches gleichzeitig $C_1 C_3 = C_2^2$ und $C_0 C_3 = C_2 s_1$ gesetzt wird. Dasselbe erreicht man auch durch $C_2 = 0$, womit nach (14a) die Konstante A verschwindet, welche die Querbiegung bedingt. In der Tat vereinfachen sich mit $A = 0$ die beiden Gleichungen (21) und (23) in

$$M' = p C_0 \quad \text{und} \quad 2 E \Theta' L = p^2 r_0 \chi C_0^2 \qquad (23a)$$

und führen so unmittelbar auf die Formel (25)

Die bisherigen Entwicklungen gelten für alle doppelt symmetrischen Meridiankurven der Röhrenfeder unter der Voraussetzung, daß bei deren Formänderung die Doppelsymmetrie erhalten bleibt. Dies wiederum kann nur dann erwartet werden, wenn die kleine Achse des Meridianschnittes klein gegen den Radius r_0 der Röhrenfeder ist, was bei den ausgeführten Manometern stets zutrifft. Für den praktisch wichtigen Fall einer elliptischen Meridiankurve

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{(r - r_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (26)$$

läßt sich die in (25) auftretende Konstante C_0 leicht aus (16) berechnen und ergibt

$$C_0 = -ab\pi\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) r_0, \qquad (16)$$

womit (25) in

$$\frac{\Delta\chi}{\chi} = -\pi\frac{p}{E}\frac{a b r_0^2}{s k^2 h}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \qquad (25a)$$

übergeht. Zur Prüfung dieser Formel, die ich schon im Jahre 1910 ohne jede Rücksicht auf die Querbiegung abgeleitet habe[1]), mögen drei von der Firma Schäffer & Budenberg in Magdeburg-Buckau bezogene Manometer dienen, deren Röhrenfedern die in der folgenden Tafel zusammengestellten Abmessungen und Formänderungen ergaben, während der Elastizitätsmodul des mitgelieferten, anscheinend aus Messing bestehenden Wandbleches durch Biegungsversuche zu $E = 10^6$ kg/qcm im Mittel bestimmt wurde.

1) Zeitschr. d. Ver. d. Ingenieure 1910, S. 1865.

Manometer für Überdruck .	$p = 1$	6	12	kg/qcm
Halbmesser der Röhrenfeder	$r_0 = 5{,}50$	5,56	5,55	cm
Große Halbachse d. Ellipse .	$a = 1{,}138$	0,847	0,850	„
Kleine „ „ „ .	$b = 0{,}293$	0,243	0,241	„
Wandstärke	$h = 0{,}031$	0,048	0,065	„
Bogenlänge der Röhrenfeder	$\chi = 270^0$	270^0	270^0	
Aufbiegung nach Versuch .	$\Delta\chi : p = 4{,}575$	0,896	0,454	
„ „ Gl. (25a) .	$\Delta\chi : p = 0{,}982$	0,766	0,578	

Mit Rücksicht auf die nur unvollkommene Ellipsengestalt der Meridiankurven sowie auf die Verlötung der Enden, welche zweifellos die der Theorie zugrunde liegende Achsensymmetrie um ZZ beeinträchtigt, kann man die Abweichungen der berechneten und gefundenen Aufbiegungen an der 6 kg- und 12 kg-Röhrenfeder als zulässig hinnehmen, zumal sie entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Bei der schwachen 1 kg Feder dagegen reicht dies zur Erklärung einer 4,8 fachen Aufbiegung jedenfalls nicht aus, so daß man hierfür auf die strengere Formel (18) zurückgreifen müßte. Außerdem ist es nicht unwahrscheinlich, daß in diesem Falle die Doppelsymmetrie bei der Formänderung verloren gegangen ist, ein Umstand, dem man in Gl. (8) näherungsweise durch Hinzufügung eines oder mehrerer Terme mit geraden Vielfachen von φ genügen könnte.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule.

(Eingegangen 26. Februar 1917.)

Zur Quantentheorie der Strahlung.

Von A. Einstein[1]).

Die formale Ähnlichkeit der Kurve der chromatischen Verteilung der Temperaturstrahlung mit Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz ist zu frappant, als daß sie lange hätte verborgen bleiben können. In der Tat wurde bereits W. Wien in der wichtigen theoretischen Arbeit, in welcher er sein Verschiebungsgesetz

$$\varrho = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{1}$$

ableitete, durch diese Ähnlichkeit auf eine weitergehende Bestimmung der Strahlungsformel geführt. Er fand hierbei bekanntlich die Formel

$$\varrho = \alpha \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{2}$$

welche als Grenzgesetz für große Werte von $\frac{\nu}{T}$ auch heute als richtig anerkannt wird (Wiensche Strahlungsformel). Heute wissen wir, daß keine Betrachtung, welche auf die klassische Mechanik und Elektrodynamik aufgebaut ist, eine brauchbare Strahlungsformel liefern kann, sondern daß die klassische Theorie notwendig auf die Rayleighsche Formel

$$\varrho = \frac{k\alpha}{h} \nu^2 T \tag{3}$$

führt. Als dann Planck in seiner grundlegenden Untersuchung seine Strahlungsformel

$$\varrho = \alpha \nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{4}$$

auf die Voraussetzung von diskreten Energie-Elementen gegründet hatte, aus welcher sich in rascher Folge die Quantentheorie entwickelte, geriet jene Wiensche Überlegung, welche zur Gleichung (2) geführt hatte, naturgemäß wieder in Vergessenheit.

Vor kurzem nun fand ich eine der ursprünglichen Wienschen Betrachtung[1]) verwandte, auf die Grundvoraussetzung der Quantentheorie sich stützende Ableitung der Planckschen Strahlungsformel, in welcher die Beziehung der Maxwellschen Kurve zu der chromatischen Verteilungskurve zur Geltung kommt. Diese Ableitung verdient nicht nur wegen ihrer Einfachheit Beachtung, sondern besonders deshalb, weil sie über den für uns noch so dunklen Vorgang der Emission und Absorption der Strahlung durch die Materie einige Klärheit zu bringen scheint. Indem ich einige vom Standpunkte der Quantentheorie naheliegende Hypothesen über die Strahlungs-Emission und -Absorption von Molekülen zugrunde legte, zeigte ich, daß Moleküle mit im Sinne der Quantentheorie bei Temperaturgleichgewicht verteilten Zuständen, im dynamischen Gleichgewicht mit Planckscher Strahlung stehen; es ergab sich auf diesem Wege die Plancksche Formel (4) in verblüffend einfacher und allgemeiner Weise. Sie ergab sich aus der Bedingung, daß die von der Quantentheorie geforderte Zustandsverteilung der inneren Energie der Moleküle allein durch Absorption

1) Zuerst abgedruckt in den Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich. Nr. 18, 1916.

1) Verh. d. Deutschen physikal. Gesellschaft Nr. 13/14. 1916, S. 318. In der vorliegenden Untersuchung sind die der eben zitierten Abhandlung gegebenen Überlegungen wiederholt.

und Emission von Strahlung sich einstellen muß.

Wenn die eingeführten Hypothesen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie das Richtige treffen, so müssen sie aber noch mehr liefern als die richtige statistische Verteilung der inneren Energie der Moleküle. Bei Absorption und Emission von Strahlung findet nämlich auch eine Impuls-Übertragung auf die Moleküle statt; diese führt dazu, daß sich durch die bloße Wechselwirkung von Strahlung und Molekülen eine bestimmte Geschwindigkeitsverteilung der letzteren einstellt. Diese muß offenbar dieselbe sein wie diejenige Geschwindigkeitsverteilung, welche die Moleküle bei alleiniger Wirkung gegenseitiger Zusammenstöße annehmen, d. h. sie muß mit der Maxwellschen Verteilung übereinstimmen. Es muß gefordert werden, daß die mittlere kinetische Energie, welche ein Molekül (pro Freiheitsgrad) im Planckschen Strahlungsfelde von der Temperatur T annimmt, gleich $\frac{kT}{2}$ sei; dies muß gelten unabhängig von der Natur der betrachteten Moleküle und unabhängig von den von ihnen absorbierten und emittierten Frequenzen. In dieser Abhandlung wollen wir dartun, daß dieser weitgehenden Forderung in der Tat ganz allgemein genügt wird; dadurch erhalten unsere einfachen Hypothesen über die Elementarvorgänge der Emission und Absorption eine neue Stütze.

Damit das genannte Resultat sich ergebe, bedarf es aber einer gewissen Ergänzung der früher zugrunde gelegten Hypothesen, welche sich lediglich auf den Austausch der Energie bezogen. Es entsteht die Frage: Erhält das Molekül einen Stoß, wenn es die Energie ε absorbiert oder emittiert? Betrachten wir vom Standpunkt der klassischen Elektrodynamik beispielsweise die Ausstrahlung. Wenn ein Körper die Energie ε ausstrahlt, so erhält er den Rückstoß (Impuls) $\frac{\varepsilon}{c}$, wenn die ganze Strahlungsmenge ε nach der gleichen Richtung ausgestrahlt wird. Erfolgt aber die Ausstrahlung durch einen räumlich symmetrischen Vorgang, z. B. Kugelwellen, so kommt überhaupt kein Rückstoß zustande. Diese Alternative spielt auch bei der Quantentheorie der Strahlung eine Rolle. Nimmt ein Molekül beim Übergang von einem quantentheoretisch möglichen Zustand in einen andern die Energie ε in Form von Strahlung auf, oder gibt es hierbei die Energie in Form von Strahlung ab, so kann ein derartiger Elementarprozeß als ein teilweise oder vollständig räumlich gerichteter oder auch als ein symmetrischer (nicht gerichteter) gedacht werden. Es zeigt sich nun, daß wir nur dann zu einer widerspruchslosen Theorie gelangen, wenn wir jene Elementarprozesse als vollständig gerichtete Vorgänge auffassen; hierin liegt das Hauptergebnis der nachfolgenden Betrachtungen.

§ 1. Grundhypothese der Quantentheorie. Kanonische Zustandsverteilung.

Nach der Quantentheorie vermag ein Molekül bestimmter Art, abgesehen von seiner Orientierung und Translationsbewegung, nur eine diskrete Reihe von Zuständen $Z_1, Z_2 \ldots Z_n \ldots$ anzunehmen, deren (innere) Energie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots$ sei. Gehören Moleküle dieser Art einem Gas von der Temperatur T an, so ist die relative Häufigkeit W_n dieser Zustände Z_n durch die der kanonischen Zustandsverteilung der statistischen Mechanik entsprechende Formel

$$W_n = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \tag{5}$$

gegeben. In dieser Formel ist $k = \frac{R}{N}$ die bekannte Boltzmannsche Konstante, p_n eine für das Molekül und den n-ten Quantenzustand desselben charakteristische, von T unabhängige Zahl, die als das statistische „Gewicht" dieses Zustandes bezeichnet werden kann. Die Formel (5) kann aus dem Boltzmannschen Prinzip oder auf rein thermodynamischem Wege abgeleitet werden. Die Gleichung (5) ist der Ausdruck der weitgehendsten Verallgemeinerung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes der Geschwindigkeiten.

Die letzten prinzipiellen Fortschritte der Quantentheorie beziehen sich auf die theoretische Ermittelung der quantentheoretisch möglichen Zustände Z_n und deren Gewichte p_n. Für die vorliegende prinzipielle Untersuchung ist eine nähere Bestimmung der Quantenzustände nicht erforderlich.

§ 2. Hypothesen über den Energieaustausch durch Strahlung.

Es seien Z_n und Z_m zwei im Sinne der Quantentheorie mögliche Zustände des Gasmoleküls, deren Energien ε_n bzw. ε_m die Ungleichung

$$\varepsilon_m > \varepsilon_n$$

erfüllen. Das Molekül möge imstande sein, aus dem Zustande Z_n in den Zustand Z_m überzugehen unter Aufnahme der Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$; ebenso sei ein Übergang aus dem Zustande Z_m in den Zustand Z_n unter Abgabe dieser Strahlungsenergie möglich. Die hierbei vom Molekül aufgenommene oder abgegebene

Strahlung sei von der für die betrachtete Index-Kombination (m, n) charakteristischen Frequenz ν.

Über die Gesetze, welche für diesen Übergang maßgebend sind, führen wir einige Hypothesen ein, welche durch Übertragung der für einen Planckschen Resonator nach der klassischen Theorie bekannten Verhältnisse auf die noch unbekannten der Quantentheorie gewonnen sind.

a) Ausstrahlung. Ein in Schwingung befindlicher Planckscher Resonator strahlt nach Hertz in bekannter Weise Energie aus, unabhängig davon, ob er durch ein äußeres Feld angeregt wird oder nicht. Dementsprechend möge ein Molekül aus dem Zustande Z_m unter Emission der Strahlungs-Energie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ von der Frequenz ν ohne Anregung durch äußere Ursachen in den Zustand Z_n übergehen können. Die Wahrscheinlichkeit dW dafür, daß dies im Zeitelement dt wirklich stattfinde, sei,

$$dW = A_m^n \, dt, \tag{A}$$

wobei A_m^n eine für die betrachtete Indexkombination charakteristische Konstante bedeutet.

Das angenommene statistische Gesetz entspricht dem einer radioaktiven Reaktion, der vorausgesetzte Elementarprozeß einer derartigen Reaktion, bei welcher nur γ-Strahlen emittiert werden. Es braucht nicht angenommen zu werden, daß dieser Vorgang keine Zeit beanspruche; diese Zeit muß nur vernachlässigbar sein gegenüber den Zeiten, in denen das Molekül in den Zuständen Z_1 usw. ist.

b) Einstrahlung. Befindet sich ein Planckscher Resonator in einem Strahlungsfelde, so ändert sich die Energie des Resonators dadurch, daß das elektromagnetische Feld der Strahlung auf den Resonator Arbeit überträgt; diese Arbeit kann je nach den Phasen des Resonators und des oszillierenden Feldes positiv oder negativ sein. Dementsprechend führen wir die folgende quantentheoretische Hypothese ein. Unter der Wirkung der Strahlungsdichte ϱ der Frequenz ν kann ein Molekül vom Zustand Z_n in den Zustand Z_m übergehen, indem das Molekül die Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ aufnimmt, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_n^m \varrho \, dt. \tag{B}$$

Ebenso sei ein Übergang $Z_m \to Z_n$ unter der Einwirkung der Strahlung möglich, wobei die Strahlungsenergie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ frei wird, gemäß dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = B_m^n \varrho \, dt. \tag{B'}$$

B_n^m und B_m^n sind Konstante. Beide Vorgänge nennen wir „Zustandsänderungen durch Einstrahlung".

Es fragt sich nun, was für ein Impuls bei diesen betrachteten Zustandsänderungen auf das Molekül übertragen wird. Beginnen wir mit den Vorgängen der Einstrahlung. Leistet ein Strahlenbündel von bestimmter Richtung Arbeit auf einen Planckschen Resonator, so wird dem Strahlenbündel die entsprechende Energie entzogen. Dieser Energieübertragung entspricht nach dem Impulssatz auch eine Impulsübertragung vom Strahlenbündel auf den Resonator. Der letztere erleidet also eine Kraftwirkung in der Richtung des Strahles des Strahlenbündels. Ist die übertragene Energie negativ, so ist auch die Kraftwirkung auf den Resonator von entgegengesetzter Richtung. Im Falle der Quantenhypothese bedeutet dies offenbar folgendes. Findet durch Bestrahlung mit einem Strahlenbündel durch Einstrahlung der Vorgang $Z_n \to Z_m$ statt, so wird auf das Molekül der Impuls $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels übertragen. Bei dem Einstrahlungsvorgang $Z_m \to Z_n$ hat der übertragene Impuls dieselbe Größe, aber die entgegengesetzte Richtung. Für den Fall, daß das Molekül gleichzeitig mehreren Strahlenbündeln ausgesetzt ist, setzen wir voraus, daß die ganze Energie $\varepsilon_m - \varepsilon_n$ eines Elementarprozesses einem dieser Strahlenbündel entnommen bzw. zugefügt wird, so daß auch in diesem Falle der Impuls $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen wird.

Bei der Energieabgabe durch Ausstrahlung wird im Falle des Planckschen Resonators im ganzen kein Impuls auf den Resonator übertragen, weil nach der klassischen Theorie die Ausstrahlung in einer Kugelwelle erfolgt. Es wurde aber bereits bemerkt, daß wir zu einer widerspruchsfreien Quantentheorie nur gelangen können, indem wir voraussetzen, daß auch der Prozeß der Ausstrahlung ein gerichteter Prozeß sei. Es wird dann bei jedem Elementarprozeß der Ausstrahlung $(Z_m \to Z_n)$ ein Impuls von der Größe $\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c}$ auf das Molekül übertragen. Ist letzteres isotrop, so müssen wir alle Ausstrahlungsrichtungen als gleich wahrscheinlich annehmen. Ist das Molekül nicht isotrop, so gegelangen wir zu derselben Aussage, wenn die Orientierung im Laufe der Zeit nach den Gesetzen des Zufalls wechselt. Eine derartige Voraussetzung muß übrigens auch für die statistischen Gesetze (B) und (B') der Einstrahlung gemacht werden, da sonst die Konstanten B_n^m und B_m^n von der Richtung abhängen müßten, was wir durch diese Annahme der Isotropie oder Pseudoisotropie (durch zeit-

liche Mittelwert-Bildung) des Moleküls vermeiden können.

§ 3. Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes.

Wir fragen jetzt nach derjenigen wirksamen Strahlungsdichte ϱ, welche herrschen muß, damit der Energieaustausch zwischen Strahlung und Molekülen vermöge der statistischen Gesetze (A), (B) und (B′) die Zustandsverteilung der Moleküle gemäß Gleichung (5) nicht stört. Dafür ist nötig und hinreichend, daß pro Zeiteinheit durchschnittlich ebenso viele Elementarprozesse vom Typus (B) stattfinden als von den Typen (A) und (B′) zusammen. Diese Bedingung liefert vermöge (5), (A), (B), (B′) für die der Indexkombination (m, n) entsprechenden Elementarprozesse die Gleichung

$$p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho = p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} (B_m^n \varrho + A_m^n).$$

Soll ferner ϱ mit T ins Unendliche wachsen, was wir annehmen wollen, so muß zwischen den Konstanten B_n^m und B_m^n die Beziehung

$$p_n B_n^m = p_m B_m^n \tag{6}$$

bestehen. Wir erhalten dann als Bedingung des dynamischen Gleichgewichts aus unserer Gleichung

$$\varrho = \frac{\dfrac{A_m^n}{B_m^n}}{e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \tag{7}$$

Es ist dies die Abhängigkeit der Strahlungsdichte von der Temperatur gemäß dem Planckschen Gesetze. Aus dem Wienschen Verschiebungsgesetze (1) folgt hieraus sofort, daß

$$\frac{A_m^n}{B_m^n} = \alpha \nu^3 \tag{8}$$

und

$$\varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \tag{9}$$

sein muß, wobei α und h universelle Konstanten sind. Um den numerischen Wert der Konstante α zu ermitteln, müßte man eine exakte Theorie der elektrodynamischen und mechanischen Vorgänge haben; man bleibt hier vorläufig auf die Behandlung des Rayleighschen Grenzfalles hoher Temperaturen angewiesen, für welchen die klassische Theorie in der Grenze gilt.

Gleichung (9) bildet bekanntlich die zweite Hauptregel in Bohrs Theorie der Spektra, von der man nach Sommerfelds und Epsteins Vervollständigung schon behaupten darf, daß sie zum gesicherten Bestande unserer Wissenschaft gehört. Sie enthält implizite auch das photochemische Äquivalenzgesetz, wie ich gezeigt habe.

§ 4. Methode zur Berechnung der Bewegung der Moleküle im Strahlungsfelde.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Bewegungen, welche unsere Moleküle unter dem Einflusse der Strahlung ausführen. Wir bedienen uns dabei einer Methode, welche aus der Theorie der Brownschen Bewegung wohl bekannt ist, und von mir schon mehrfach zur rechnerischen Untersuchung von Bewegungen im Strahlungsraume benutzt wurde. Zur Vereinfachung der Rechnung führen wir die letztere lediglich für den Fall durch, daß Bewegungen nur in einer Richtung, der X-Richtung des Koordinatensystems, vorkommen. Wir begnügen uns ferner damit, den Mittelwert der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung zu berechnen, verzichten also auf den Beweis dafür, daß diese Geschwindigkeiten v nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt sind. Die Masse M des Moleküls sei hinreichend groß, daß höhere Potenzen von $\frac{v}{c}$ gegen niedrigere vernachlässigt werden; wir können dann auf das Molekül die gewöhnliche Mechanik anwenden. Wir können ferner ohne wirkliche Beschränkung der Allgemeinheit so rechnen, wie wenn die Zustände mit den Indizes m und n die einzigen wären, die das Molekül annehmen kann.

Der Impuls Mv eines Moleküls erfährt in der kurzen Zeit τ zweierlei Änderungen. Trotzdem die Strahlung nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, wird das Molekül infolge seiner Bewegung eine von der Strahlung herrührende, der Bewegung entgegenwirkende Kraft erfahren. Diese sei gleich Rv, wobei R eine später zu berechnende Konstante bedeutet. Diese Kraft würde das Molekül zur Ruhe bringen, wenn nicht die Unregelmäßigkeit der Strahlungseinwirkungen zur Folge hätte, daß in der Zeit τ auf das Molekül ein Impuls Δ wechselnden Vorzeichens und wechselnder Größe übertragen würde; dieser unsystematische Einfluß wird entgegen dem vorher genannten eine gewisse Bewegung des Moleküls aufrecht erhalten. Am Ende der betrachteten kurzen Zeit τ wird der Impuls des Moleküls den Wert

$$Mv - Rv\tau + \Delta$$

besitzen. Da die Geschwindigkeitsverteilung zeitlich konstant bleiben soll, so muß die angegebene Größe ihrem mittleren absoluten Betrag nach ebenso groß sein wie die Größe Mv; die Mittelwerte der Quadrate beider Größen, erstreckt über eine lange Zeit oder über eine große Zahl Moleküle, müssen also einander gleich sein:

$$\overline{(Mv - Rv\tau + \Delta)^2} = \overline{(Mv)^2}.$$

Da wir den systematischen Einfluß von v auf den Impuls des Moleküls besonders in Rechnung gezogen haben, werden wir den Mittelwert $\overline{v\Delta}$ zu vernachlässigen haben. Durch Entwickeln der linken Seite der Gleichung erhält man daher

$$\overline{\Delta^2} = 2RMv^2\tau. \qquad (10)$$

Der Mittelwert $\overline{v^2}$, welchen die Strahlung von der Temperatur T bei unseren Molekülen durch ihre Wechselwirkung mit ihnen erzeugt, muß ebenso groß sein, wie derjenige Mittelwert $\overline{v^2}$, welcher dem Gasmolekül nach den Gasgesetzen bei der Temperatur T nach der kinetischen Gastheorie zukommt. Denn die Anwesenheit unserer Moleküle würde sonst das thermische Gleichgewicht zwischen Temperaturstrahlung und einem beliebigen Gase derselben Temperatur stören. Es muß also sein

$$\frac{M\overline{v^2}}{2} = \frac{kT}{2}. \qquad (11)$$

Gleichung (10) geht also über in

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = 2RkT. \qquad (12)$$

Die Untersuchung wird nun wie folgt weiterzuführen sein. Bei gegebener Strahlung ($\varrho(\nu)$) werden $\overline{\Delta^2}$ und R durch unsere Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Molekülen berechenbar sein. Setzt man die Resultate in (12) ein, so muß diese Gleichung identisch erfüllt sein, wenn ϱ in Funktion von ν und T ausgedrückt wird vermöge der Planckschen Gleichung (4).

§ 5. Berechnung von R.

Ein Molekül der betrachteten Art sei längs der X-Achse des Koordinatensystems K mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt. Wir fragen nach dem im Mittel von der Strahlung auf das Molekül pro Zeiteinheit übertragenen Impuls. Um diesen berechnen zu können, müssen wir die Strahlung von einem Koordinatensystem K' aus beurteilen, welches relativ zum betrachteten Molekül ruht. Denn unsere Hypothesen über Emission und Absorption haben wir nur für ruhende Moleküle formuliert. Die Transformation auf das System K' ist in der Literatur mehrfach durchgeführt, besonders genau in Mosengeils Berliner Dissertation. Ich will jedoch die einfachen Überlegungen der Vollständigkeit halber hier wiederholen.

Bezüglich K ist die Strahlung isotrop, d. h. die einem bestimmten infinitesimalen Körperwinkel $d\varkappa$ bezüglich ihrer Strahlrichtung zugeordnete Strahlung vom Frequenzbereich $d\nu$ pro Volumeneinheit ist

$$\varrho\, d\nu \frac{d\varkappa}{4\pi}, \qquad (13)$$

wobei ϱ nur von der Frequenz ν, nicht aber von der Richtung abhängig ist. Dieser hervorgehobenen Strahlung entspricht in bezug auf das Koordinatensystem K' eine hervorgehobene Strahlung, welche ebenfalls durch einen Frequenzbereich $d\nu'$ und durch einen gewissen Körperwinkel $d\varkappa'$ charakterisiert ist. Die Volumdichte dieser hervorgehobenen Strahlung ist

$$\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu' \frac{d\varkappa'}{4\pi}. \qquad (13')$$

Hierdurch ist ϱ' definiert. Es ist von der Richtung abhängig, welch letztere in geläufiger Weise durch den Winkel φ' mit der X'-Achse und dem Winkel ψ' der Y'-Z'-Projektion mit der Y'-Achse definiert sei. Diesen Winkeln entsprechen die Winkel φ und ψ, welche in analoger Weise die Richtung von $d\varkappa$ in bezug auf K festlegen.

Zunächst ist klar, daß zwischen (13) und (13') dasselbe Transformationsgesetz gelten muß wie für die Amplitudenquadrate A^2 und A'^2 einer ebenen Welle von entsprechender Richtung. Deshalb ist in der von uns gewünschten Näherung

$$\frac{\varrho'(\nu', \varphi')\, d\nu'\, d\varkappa'}{\varrho(\nu)\, d\nu\, d\varkappa} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi \qquad (14)$$

oder

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \varrho(\nu)\frac{d\nu}{d\nu'}\frac{d\varkappa}{d\varkappa'}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi\right). \qquad (14')$$

Die Relativitätstheorie ergibt ferner die mit der gewünschten Näherung gültigen Formeln

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos^2\varphi\right) \qquad (15)$$

$$\cos\varphi' = \cos\varphi - \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\cos^2\varphi \qquad (16)$$

$$\psi' = \psi. \qquad (17)$$

Aus (15) folgt mit entsprechender Näherung

$$\nu = \nu'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right).$$

Also ist, ebenfalls in der gewünschten Näherung,

$$\varrho(\nu) = \varrho\left(\nu' + \frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'\right)$$

oder

$$\varrho(\nu) = \varrho(\nu') + \frac{\partial\varrho}{\partial\nu}(\nu')\cdot\frac{v}{c}\nu'\cos\varphi'. \qquad (18)$$

Ferner ist gemäß (15), (16), und (17)

$$\frac{d\nu}{d\nu'} = 1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'$$

$$\frac{d\varkappa}{d\varkappa'} = \frac{\sin\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sin\varphi'\, d\varphi'\, d\psi'} = \frac{d(\cos\varphi)}{d(\cos\varphi')} = 1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi'$$

Vermöge dieser beiden Relationen und (18) geht (14') über in

$$\varrho'(\nu', \varphi') = \left[(\varrho)_\nu + \frac{v}{c}\nu' \cos\varphi' \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right)_\nu\right]$$
$$\left(1 - 3\frac{v}{c}\cos\varphi'\right). \qquad (19)$$

Mit Hilfe von (19) und unserer Hypothese über die Ausstrahlung und Einstrahlung des Moleküls können wir leicht den pro Zeiteinheit im Mittel auf das Molekül übertragenen Impuls berechnen. Bevor wir dies tun, müssen wir aber noch etwas sagen zur Rechtfertigung des eingeschlagenen Weges. Man kann einwenden, daß die Gleichungen (14), (15), (16) auf die mit der Quantentheorie nicht vereinbare Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes gegründet seien. Dieser Einwand trifft jedoch mehr die Form als das Wesen der Sache. Denn wie die Theorie der elektromagnetischen Vorgänge sich auch gestalten mag, so wird doch jedenfalls das Dopplersche Prinzip und das Gesetz der Aberration erhalten bleiben, damit also auch die Gleichung (15) und (16). Ferner geht die Gültigkeit der energetischen Beziehung (14) sicher über die der Undulationstheorie hinaus; dies Transformationsgesetz gilt nach der Relativitätstheorie z. B. auch für die Energiedichte einer mit (Quasi-)Lichtgeschwindigkeit bewegten Masse von unendlich kleiner Ruhedichte. Die Gleichung (19) kann daher für jede Theorie der Strahlung Gültigkeit beanspruchen. —

Die zum räumlichen Winkel $d\varkappa'$ gehörige Strahlung würde gemäß (B) pro Sekunde zu

$$B_n^m \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

Elementarprozessen der Einstrahlung von Typus $Z_n \rightarrow Z_m$ Veranlassung geben, wenn das Molekül nach jedem solchen Elementarprozeß sofort wieder in den Zustand Z_n zurückgebracht würde. In Wirklichkeit ist aber die Zeit des Verweilens im Zustande Z_n pro Sekunde gemäß (5) gleich

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}},$$

wobei zur Abkürzung

$$S = p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} + p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} \qquad (20)$$

gesetzt ist. Die Zahl dieser Prozesse pro Sekunde beträgt also in Wahrheit

$$\frac{1}{S} p_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} B_n^m \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}.$$

Bei jedem derartigen Elementarprozeß wird in Richtung der positiven X'-Achse der Impuls

$$\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'$$

auf das Atom übertragen. Auf analogem Wege fanden wir, gestützt auf (B), daß die entsprechende Zahl der Elementarprozesse der Einstrahlung vom Typus $Z_m \rightarrow Z_n$ pro Sekunde

$$\frac{1}{S} p_m e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} B_m^n \varrho'(\nu', \varphi') \frac{d\varkappa'}{4\pi}$$

ist, und es wird bei jedem solchen Elementarprozeß der Impuls

$$-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{c} \cos\varphi'$$

auf das Molekül übertragen. Der im ganzen pro Zeiteinheit durch Einstrahlung pro Zeiteinheit auf das Molekül übertragene Impuls ist daher mit Rücksicht auf (6) und (9)

$$\frac{h\nu'}{cS} p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) \int \varrho'(\nu', \varphi') \cos\varphi' \frac{d\varkappa'}{4\pi},$$

wobei die Integration über alle räumlichen Elementarwinkel zu erstrecken ist. Durch Ausführung der letzteren ergibt sich vermöge (19) der Wert:

$$-\frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m \left(e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} - e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}}\right) \cdot v.$$

Dabei ist die wirksame Frequenz wieder mit ν (statt ν') bezeichnet.

Dieser Ausdruck stellt aber den ganzen pro Zeiteinheit im Mittel auf ein mit der Geschwindigkeit v bewegtes Molekül übertragenen Impuls dar. Denn es ist klar, daß die ohne Einwirkung der Strahlung stattfindenden Elementarprozesse der Ausstrahlung, vom System K' aus betrachtet, keine Vorzugsrichtung besitzen, also im Mittel auch keinen Impuls auf das Molekül übertragen können. Wir erhalten daher als Endergebnis unserer Betrachtung:

$$R = \frac{h\nu}{c^2 S}\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right) p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \qquad (21)$$

§ 6. Berechnung von $\overline{\varDelta^2}$.

Viel einfacher ist es, die Wirkung der Unregelmäßigkeit der Elementarprozesse auf das mechanische Verhalten des Moleküls zu berechnen. Denn man kann dieser Rechnung ein ruhendes Molekül zugrunde legen bei dem Grade der Näherung, mit dem wir uns von Anfang an begnügt haben.

Es verursache irgendein Ereignis, daß auf ein Molekül ein Impuls λ in der X-Richtung übertragen werde. Dieser Impuls sei in verschiedenen Fällen von verschiedenen Vorzeichen und verschiedener Größe. Es gelte jedoch für λ ein solches statistisches Gesetz, daß der Mittelwert $\overline{\lambda}$ verschwindet. Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ die Impulswerte, welche mehrere voneinander unabhängig wirkende Ursachen auf das Molekül in

der X-Richtung übertragen, so daß der im ganzen übertragene Impuls Δ gegeben sei durch

$$\Delta = \Sigma\lambda_\nu.$$

Dann ist, wenn für die einzelnen $\lambda\nu$ die Mittelwerte $\overline{\lambda_\nu}$ verschwinden:

$$\overline{\Delta^2} = \Sigma\overline{\lambda_\nu^2}. \qquad (22)$$

Sind die Mittelwerte $\overline{\lambda_\nu^2}$ der einzelnen Impulse einander gleich $(=\overline{\lambda^2})$, und ist l die gesamte Zahl der die Impulse liefernden Ereignisse, so gilt die Beziehung

$$\overline{\Delta^2} = l\overline{\lambda^2}. \qquad (22a)$$

Nach unseren Hypothesen wird nun bei jedem Prozeß der Einstrahlung und der Ausstrahlung auf das Molekül der Impuls

$$\lambda = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi$$

übertragen. Dabei bedeutet φ den Winkel zwischen der X-Achse und einer nach den Gesetzen des Zufalls gewählten Richtung. Daher ergibt sich

$$\overline{\lambda^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2. \qquad (23)$$

Da wir annehmen, daß alle stattfindenden Elementarvorgänge als voneinander unabhängige Ereignisse aufzufassen sind, so dürfen wir (22a) anwenden. l ist dann die Zahl der im ganzen in der Zeit τ stattfindenden Elementarvorgänge. Diese ist doppelt so groß als die Zahl der Einstrahlungsvorgänge $Z_n \rightarrow Z_m$ in der Zeit τ. Es ist also

$$l = \frac{2}{S} p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho\tau. \qquad (24)$$

Es ergibt sich aus (23), (24) und (22)

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{2}{3S}\left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 p_n B_n^m e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} \varrho. \qquad (25)$$

§ 7. Ergebnis.

Um nun zu zeigen, daß die nach unseren Grundhypothesen von der Strahlung auf die Moleküle ausgeübten Impulse das thermodynamische Gleichgewicht niemals stören, brauchen wir nur die in (25) und (21) für $\frac{\Delta^2}{\tau}$ und R berechneten Werte einzusetzen, nachdem in (21) die Größe

$$\left(\varrho - \frac{1}{3}\nu\frac{\partial\varrho}{\partial\nu}\right)\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

gemäß (4) durch $\frac{\varrho h\nu}{3kT}$ ersetzt ist. Es zeigt sich dann sofort, daß unsere Fundamentalgleichung (12) identisch erfüllt ist. —

Die nunmehr beendeten Überlegungen liefern eine starke Stütze für die in § 2 angegebenen Hypothesen über die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung durch Prozesse der Absorption und Emission, bzw. durch Einstrahlung und Ausstrahlung. Zu diesen Hypothesen wurde ich durch das Bestreben geführt, in möglichst einfacher Weise ein quantentheoretisches Verhalten der Moleküle zu postulieren, das dem eines Planckschen Resonators der klassischen Theorie analog sei. Es ergab sich zwanglos aus der allgemeinen Quantenannahme für die Materie die zweite Bohrsche Regel (Gleichung 9), sowie die Plancksche Strahlungsformel.

Am wichtigsten erscheint mir aber das Ergebnis bezüglich der bei Einstrahlung und Ausstrahlung auf das Molekül übertragenen Impulse. Wenn eine unserer Annahmen über letztere abgeändert würde, so würde eine Verletzung der Gleichung (12) die Folge sein; es erscheint kaum möglich, anders als auf Grund unserer Annahmen mit dieser durch die Wärmetheorie geforderten Beziehung im Einklang zu bleiben. Wir können daher folgendes als ziemlich sicher erwiesen betrachten.

Bewirkt ein Strahlenbündel, daß ein von ihm getroffenes Molekül die Energiemenge $h\nu$ in Form von Strahlung durch einen Elementarprozeß aufnimmt oder abgibt (Einstrahlung), so wird stets der Impuls $\frac{h\nu}{c}$ auf das Molekül übertragen, und zwar bei Energieaufnahme in der Fortpflanzungsrichtung des Bündels, bei Energieabgabe in der entgegengesetzten Richtung. Befindet sich das Molekül unter der Wirkung mehrerer gerichteter Strahlenbündel, so ist immer nur eines derselben an einem Elementarvorgang der Einstrahlung beteiligt; dieses Bündel allein bestimmt dann die Richtung des auf das Molekül übertragenen Impulses.

Erleidet das Molekül ohne äußere Anregung einen Energieverlust von der Größe $h\nu$, indem es diese Energie in Form von Strahlung abgibt (Ausstrahlung), so ist auch dieser Prozeß ein gerichteter. Ausstrahlung in Kugelwellen gibt es nicht. Das Molekül erleidet in einer beim jetzigen Stande der Theorie nur durch den „Zufall" bestimmten Richtung bei dem Elementarprozeß der Ausstrahlung einen Rückstoß von der Größe $\frac{h\nu}{c}$.

Diese durch die Gleichung (12) geforderten Eigenschaften der Elementarprozesse lassen die Aufstellung einer eigentlich quantenhaften Theorie der Strahlung fast unvermeidlich erscheinen. Die Schwäche der Theorie liegt einerseits darin,

daß sie uns dem Anschluß an die Undulationstheorie nicht näher bringt, andererseits darin, daß sie Zeit und Richtung der Elementarprozesse dem „Zufall" überläßt; trotzdem hege ich das volle Vertrauen in die Zuverlässigkeit des eingeschlagenen Weges.

Noch eine allgemeine Bemerkung soll hier Platz finden. Fast alle Theorien der Temperaturstrahlung beruhen auf der Betrachtung der Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Molekülen. Aber im allgemeinen begnügt man sich mit der Betrachtung des Energie-Austausches, ohne den Impuls-Austausch zu berücksichtigen. Man fühlt sich dazu leicht berechtigt, weil die Kleinheit der durch die Strahlung übertragenen Impulse es mit sich bringt, daß letztere gegenüber anderen bewegungserzeugenden Ursachen in der Wirklichkeit fast stets zurücktreten. Aber für die theoretische Betrachtung sind jene kleinen Wirkungen neben den ins Auge fallenden der Energieübertragung durch Strahlung als durchaus gleichwertig anzusehen, indem Energie und Impuls aufs engste miteinander verknüpft sind; es kann deshalb eine Theorie erst dann als berechtigt angesehen werden, wenn gezeigt ist, daß die nach ihr von der Strahlung auf die Materie übertragenen Impulse zu solchen Bewegungen führen, wie sie die Wärmetheorie verlangt.

(Eingegangen 3. März 1917.)

Über Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten.

Von M. Wolfke.

(Mit Tafel I.)

Bekanntlich gibt es zwei verschiedene photographische Wirkungen der Kanalstrahlen. Bei kurzer Exposition entstehen an den von Kanalstrahlen getroffenen Stellen Schwärzungen, bei längerer Exposition — eine Art Solarisation[1]).

Zwecks Anwendung der Kanalstrahlen auf einige neue Forschungsgebiete habe ich mir vor allem die Aufgabe gestellt, mit möglichst kurzen Expositionen scharfe Parabeln zu erhalten. Hierzu ist die Solarisationsmethode nicht geeignet, da sie eine längere Expositionszeit erfordert, so daß ich auf die Schwärzungsmethode allein angewiesen war.

J. Koenigsberger und J. Kutschewski[2]), die wohl die ersten gewesen sind, welche die photographische Methode auf die Kanalstrahlen anwandten, suchten vergebens scharfe Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. Sie untersuchten mehrere Sorten von Trockenplatten mit negativem Resultat; auch nach mehreren Minuten der Exposition erhielten sie nur allgemeine Schwärzungen der Platten, ohne daß die Parabeln der Kanalstrahlen zu sehen waren. Nur auf einer nichtabgeschliffenen Lippmannplatte war nach 4' Expositionszeit der neutrale Fleck ohne die abgelenkten Strahlen schwach sichtbar. Bessere Resultate erhielten Koenigsberger und Kutschewski mit Chlorbromsilberpapier. Auch die Schwärzungsbilder von T. Retschinsky[1]), wie aus seinen Reproduktionen zu ersehen ist[2]), sind nur diffuse Flecke, nicht nur zur quantitativen, sondern auch zur qualitativen Untersuchung vollkommen unbrauchbar. T. Retschinsky arbeitete deshalb ausschließlich mit der Solarisationsmethode[3]), die er zu einer großen Vollkommenheit ausgebildet hat. Im Gegensatz zu diesen negativen Resultaten stehen die schönen, äußerst scharfen Aufnahmen von J. J. Thomson[4]). Allerdings läßt sich aus seinen Publikationen nicht ersehen, ob die Bilder Schwärzungsparabeln oder Solarisationsbilder sind, und T. Retschinsky, gestützt auf eigene Erfahrung und das Aussehen der Thomsonschen Reproduktionen, vermutet, daß auch die Thomsonschen Aufnahmen keine Schwärzungsbilder, sondern Solarisationsbilder sind[5]).

Nach einigen Wochen Vorversuchen in dieser Richtung ist es mir gelungen, scharfe, zu quantitativen Messungen gut geeignete, Schwärzungsparabeln auf Trockenplatten zu erhalten. In Anbetracht des oben Gesagten ist wohl nicht ohne Interesse die näheren Versuchsbedingungen anzugeben, die die Aufnahme von scharfen Schwärzungsparabeln ermöglichen.

Die Anordnung des Aufbaues war im Prinzip mit einigen technischen Veränderungen und Verbesserungen die gleiche wie sie in Würzburg bei W. Wien ausgearbeitet worden ist und die auch T. Retschinsky[6]) vor zwei Jahren bei seinen Versuchen in Zürich benutzte. Sei es mir gestattet, Herrn Dr. T. Retschinsky auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen für seine Liebenswürdigkeit, mit der er mich seinerzeit in die Einzelheiten seiner Anordnung und die Kanalstrahltechnik eingeweiht hat.

1) Vgl. Bericht von T. Retschinsky, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**, 75, 1916.

2) J. Koenigsberger und J. Kutschewski, diese Zeitschr. **11**, 666, 1910; Verh. d. D. Phys. G. **13**, 133, 1911.

1) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

2) Vgl. l. c. Taf. VI. Fig. 1 u. 2.

3) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **48**, 546, 1915.

4) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6), **24**, 244, 1912.

5) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 540, 1915.

6) T. Retschinsky, Ann. d. Phys. (4), **47**, 525, 1915.

Sämtliche Aufnahmen habe ich mit Induktorium ausgeführt. Das Entladungspotential wurde annähernd mittelst einer parallel geschalteten Funkenstrecke zwischen zwei Aluminiumkugeln von 31 mm Durchmesser gemessen. Das Auspumpen des Kanalrohres besorgte eine Gaedepumpe ohne Kühlung. Der Kanal besaß 0,7 mm im Durchmesser und war 6 cm lang. Eine Wiensche Durchströmungsanordnung, die an das Kanalrohr angeschlossen war, habe ich nur selten benutzt, da sie sich bei kurzen Expositionszeiten (0,1″ bis 10″) erübrigte. In den meisten Fällen wurden das Entladungsrohr und die Kamera von beiden Seiten des Kanals gleichzeitig auf den gewünschten Entladungsdruck gepumpt, wonach die Außenverbindung zwischen Kamera und Entladungsrohr abgeschlossen blieb und Kamera allein weiter bis unter 0,0001 mm *Hg*-Druck einige Minuten gepumpt wurde. Ich habe ca. 100 Bilder unter verschiedenen Bedingungen aufgenommen. Das Rohr war stets mit trockener Luft gefüllt. Zu den meisten Aufnahmen benutzte ich „Agfa"-Diapositiv und in einigen Fällen auch „Agfa"-Extrarapidplatten.

Die ersten Aufnahmen zeigten starke Verschleierung, obgleich man den neutralen Fleck und auf manchen auch die abgelenkten Strahlen erkennen konnte. Eine Lichtwirkung war ausgeschlossen, da einerseits der enge Kanal und das Diaphragma kein merkliches Licht aus dem Entladungsraum in die Kamera ließen, anderseits der Druck in der Kamera während der Exposition unter 0,0001 mm war; bekanntlich ist bei diesem Vakuum das Leuchten der Kanalstrahlen äußerst schwach. Einige hierbei beobachtete Tatsachen scheinen dafür zu sprechen, daß die Ursache dieser Verschleierung, vor allem bei höheren Entladungspotentialen mit Funkenstrecken über 10 mm, in einer Entladung hinter dem Kanal im Innern der Kamera liegt. Diese Entladung findet zwischen den isolierten Elektrodenplatten, die zur Herstellung des ablenkenden elektrostatischen Feldes dienen, und dem Gehäuse der Kamera, welches wie üblich mit dem Kanal und dem negativen Pol des Induktors verbunden ist, statt. Es genügt nämlich, auch bei sehr hohen Entladungspotentialen mit Funkenstrecken über 40 mm eine von den Elektrodenplatten mit dem Gehäuse direkt leitend zu verbinden, um die Verschleierung vollständig zu beseitigen. Diese oben erwähnte Entladung im Innern der Kamera bei isolierten Elektrodenplatten scheint eine ablenkbare Strahlung, wahrscheinlich Kathodenstrahlen, zu verursachen, welche die Platte verschleiern. Dies ist deutlich aus folgenden Tatsachen zu ersehen.

Schließt man die beiden Elektrodenplatten außen kurz miteinander, läßt sie jedoch isoliert vom Gehäuse, so erhält man bei einem Entladungspotential von 30 mm Funkenstrecke und 5″ Expositionszeit eine sehr stark verschleierte Aufnahme mit nur schwachen Umrissen des neutralen Flecks.

Schaltet man ein ablenkendes elektrostatisches Feld (600 Volt Hochspannungsbatterie), in dem jedoch die beiden Elektrodenplatten vom Gehäuse isoliert bleiben, ein, so erscheint die Platte bei gleichen Aufnahmebedingungen ganz klar und die abgelenkten Strahlen treten scharf hervor. (Vgl. Taf. Fig. 1.)

Fügt man zum elektrostatischen Feld noch ein schwaches Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 0,5 Amp.) hinzu, so erhält man eine klare Platte mit scharfen Parabeln. (Vgl. Taf. Fig. 2.)

Steigert man das Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 0,75 Amp.), so erscheinen die Parabeln noch scharf, aber die Platte zeigt schwachen Schleier. (Vgl. Taf. Fig. 3.)

Bei noch stärkerem Magnetfeld (Magnetisierungsstrom = 1,5 Amp.) sind die Parabeln noch sichtbar, aber die Platte wird sehr stark verschleiert. (Vgl. Taf. Fig. 4.)

Bei 2 Amp. Magnetisierungsstrom und darüber ist die Platte bei gleichen Aufnahmebedingungen total verschleiert.

Es genügt jedoch, eine von den beiden Elektrodenplatten mit dem Gehäuse der Kamera leitend zu verbinden, um auch bei starken Magnetisierungsströmen ein vollkommen klares Bild zu erhalten. (Vgl. Taf. Fig. 5.) Die beiden letzten Aufnahmen (Fig. 4 u. 5) habe ich sofort nacheinander unter gleichen Bedingungen ausgeführt, nur daß bei der ersten beide Elektrodenplatten vom Gehäuse isoliert waren und bei der zweiten Aufnahme die positive Elektrodenplatte mit dem Gehäuse der Kamera in leitender Verbindung stand.

Bei kleinen Entladungspotentialen (Funkenstrecken ca. 8 mm) habe ich auch mit isolierten Elektrodenplatten klare Bilder erhalten; bei höheren Entladungspotentialen mußte jedoch stets, um klare Bilder zu erhalten, eine von den Elektrodenplatten mit dem Gehäuse in Verbindung stehen. Ich habe auch bei sehr hohen Entladungspotentialen (Funkenstrecke über 40 mm), wenn die eine Elektrodenplatte mit dem Gehäuse verbunden war, nie einen Schleier auf den Aufnahmen beobachtet.

Auf die Schärfe der Parabeln hat außerdem das Entladungspotential und der Druck im Entladungsraum einen Einfluß. Der Einfluß des Druckes in der Kamera auf die Streuung der Kanalstrahlen wurde bereits von vielen Seiten untersucht. Um den Einfluß der beiden eben

erwähnten Faktoren unabhängig voneinander zu untersuchen, benutzte ich zwei verschiedene Entladungsröhren, von welchen das eine ein Zylinderrohr von 5 cm Durchmesser und 40 cm Länge war, das zweite dagegen durch Ansetzen einer Kugel von 18 cm Durchmesser an der Anodenseite des ersteren entstanden war. Bei letzterem wurde die Anode in einem engeren Rohr an die Kugel angesetzt. Die Entladungsbedingungen waren in diesen beiden Röhren verschieden, so z. B. erhielt man im Zylinderrohr bei einem Druck von 0,005 mm eine Funkenstrecke von ca. 30 mm. Im Rohr mit dem Kugelansatz dagegen zeigte sich bei diesem Druck eine Funkenstrecke von ca. 4 mm. Funkenstrecken von 30 mm erhielt ich erst unter 0,001 mm Druck. Aus dem Vergleich der Aufnahmen, die in den beiden Röhren unter sonst gleichen Bedingungen gemacht worden sind, d. h. bei gleicher Expositionszeit und gleichem Druck in der Kamera, lassen sich folgende zwei Schlüsse ziehen.

Bei gleichem Enladungspotential sind die Parabeln schärfer bei tieferem Druck im Entladungsraum (Rohr mit Kugelansatz).

Bei gleichem Druck im Entladungsraum sind die Parabeln schärfer beim höheren Entladungspotential (Zylinderrohr).

Die Schärfe der Parabeln scheint auch von der Wahl der Platten abzuhängen; eine genaue Untersuchung darüber ist im Gange. Bis jetzt habe ich festgestellt, daß die Diapositivplatten sich zu derartigen Aufnahmen besser eignen (vgl. Taf. Fig. 1, 2, 3, u. 5), als z. B. die Extrarapidplatten, auf denen die Parabeln weniger scharf hervortreten. (Vgl. Taf. Fig. 6.) Alle die hier reproduzierten Aufnahmen wurden bei gleichem Entladungspotential (Funkenstrecke ca. 30 mm) und mit gleicher Expositionszeit 5 Sek. aufgenommen.

Sei mir auch an dieser Stelle gestattet, dem Vorstand des Physik. Inst. d. Eidg. Techn. Hochschule Herrn Prof. Dr. P. Weiss und dem Assistenten Herrn Priv.-Doz. Dr. A. Piccard für ihr freundlichstes Engegenkommen meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Zusammenfassung.

Es wurden scharfe Schwärzungsparabeln der Kanalstrahlen auf Trockenplatten mit einigen Sekunden Expositionszeit und bei üblicher Anordnung erhalten, wobei sich für die Aufnahme solcher Parabeln folgende Bedingungen als günstig erwiesen haben:

1. Leitende Verbindung zwischen einer der beiden Elektrodenplatten, die zur Herstellung des ablenkenden elektrostatischen Feldes dienen, und dem Gehäuse der Kamera;

2. möglichst tiefer Druck, nicht nur in der Kamera, sondern auch im Entladungsraum selbst;

3. hohe Entladungsspannungen.

Zürich, Januar 1917.

(Eingegangen 5. Februar 1917.)

Widersprüche gegen die Wellenkinematik; ihre Auflösungen. II[1]).

Von Karl Uller.

Wenn eine Welle auch nicht in Gedanken aus Elementarwellen aufgebaut werden darf, wie in meiner vorangehenden Arbeit[2]) aus dem Interferenz-Prinzip gefolgert werden mußte, dann ist auch des Huygens-Kirchhoffschen Prinzips bisherige Deutung unstatthaft, nach der die Welle außerhalb ihres Quellgebietes in einem beliebigen Punkt dargestellt werden kann durch die Summe von passend zurückdatierten Elementarkugelwellen, die von allen Elementen einer Oberfläche nach dem Aufpunkt in ihrem Innern hinlaufen. Da die Oberfläche beliebig außerhalb des Quellgebietes gelegen sein kann, wäre jeder Punkt der Welle Ausgangspunkt von Kugelwellen. Die Welle könnte demnach aufgebaut gedacht werden auf der Interferenz unendlich vieler Elementarkugelwellen.

Wollen wir hinter die wahre Bedeutung des so wichtigen Oberflächensatzes kommen, dann müssen wir uns nochmals seine mathematische Herleitung in aller Kürze vergegenwärtigen. Wir beschränken uns dabei auf Wellen von elementarer Schwingungsform.

Für zwei neben ihren zwei ersten Ableitungen reguläre Skalare U und V, die in demselben Raum existieren, gilt der, eine Subtraktionswirkung darstellende, Greensche Satz

$$\int dv\{U\nabla^2 V - V\nabla^2 U\} = \int (do, U \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U). \qquad (1)$$

Genügen beide einer Gleichung von der Form

$$aS + \nabla^2 S = 0, \qquad (2)$$

so verschwindet in (1) die linke Seite, wenn in ihr alle Integrationselemente endlich bleiben. Die Bedingungsgleichung (2) für das Verschwinden verlockt durch ihren Bau dies Ergebnis für die Wellentheorie nutzbar zu machen, denn dort tritt für homogene Körper häufig Gl. (2) als Wellengleichung auf. Bei Wellen von elementarer Schwingungsform sind dann U und V reine Ortsfunktionen, und zwar komplexe; ist die Welle vektoriell, so können wir U und V

1) I: Diese Zeitschr. **18**, 99, 1917.

2) K. Uller, Das Interferenz-Prinzip. Diese Zeitschr. **18**, 101, 1917.

als entsprechende Komponenten des Feldes auffassen. Wir bestimmen nun, daß U für die zu berechnende Welle verwendet werden soll und V für eine gleichzeitig existierende Kugelwelle von gleicher Schwingungsform, welche der U-Welle übergelagert sein soll. Wir haben dann also $V = e^{i\sqrt{a}r}/r$ in (1) einzusetzen. Liegt der Aufpunkt des Topographen $\mathfrak{r}$ vom Betrage r außerhalb der in (1) gedachten Oberfläche O, so haben wir noch nichts gewonnen. Setzen wir fest, daß er innerhalb O liegen soll, so ist V im Aufpunkt ($\mathfrak{r} = 0$) unendlich groß, was gegen die Voraussetzungen von (1) verstößt. Wir können aber den Aufpunkt durch eine kleine Kugelfläche, für die er Mittelpunkt ist, ausschließen von dem Integrationsgebiet. Ziehen wir nun diese Kugelfläche auf null zusammen, so konvergiert der ihr entsprechende Teil des Oberflächenintegrals in (1) gegen den Grenzwert $-4\pi U$, so daß wir für eine beliebige den Aufpunkt umschließende Oberfläche O, innerhalb welcher (2) gilt, den Huygens-Kirchhoffschen Oberflächensatz haben

$$4\pi U = \int \left(do, U \cdot \operatorname{grad} e^{i\sqrt{a}r}/r - e^{i\sqrt{a}r}/r \cdot \operatorname{grad} U\right). \qquad (3)$$

Die Deutung kann nach seiner Herleitung nur die sein, daß durch Überlagerung einer gedachten Kugelwelle über die zu berechnende U-Welle der Wert der U-Welle im Pol der Kugelwelle angebbar ist. Dabei ist gleichgültig, ob die Kugelwelle nach außen oder nach innen läuft, wenn sie nur von derselben Schwingungsform ist; denn in der zweideutigen Wurzel aus dem Wellenparameter a steckt auch der Zeitfaktor ν der Schwingungsform.

Die Zwangsvorstellung der Elementarwellen-Interferenz, die durch Fresnel in die Wellentheorie gekommen ist, verleitete dagegen die Analysis dazu, den Ausdruck (3) zu schreiben

$$4\pi U e^{i\nu t} = \int \left(do, \operatorname{grad} \frac{U e^{i(\nu t + \sqrt{a}r)}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} U e^{i\nu t}\Big|_{t+\sqrt{a}r}\right), \qquad (3')$$

was nur möglich ist, wenn man eigens zu diesem Zweck festsetzt: Bei der Operation grad soll U konstant gehalten werden, und im zweiten Glied von (3′) soll nachträglich t durch $t + \sqrt{a}r$ ersetzt werden. Diese Vorschriften, von denen die erste mathematisch recht sonderbar klingt, sind notwendig geworden, damit man das gewünschte Resultat ablesen kann, nämlich daß an der Oberfläche gedachte Quellpunkte in zusammenhängender Verteilung liegen, deren zu je nach dem Abstand vom Aufpunkt verschiedenen Zeiten entsandten Elementarkugelwellen den Wert der U-Welle im Aufpunkt zur Zeit t liefern, und zwar durch Überlagerung und Interferenz. Daß man der mathematischen Unzulänglichkeit entgehen kann, indem man $U \operatorname{grad} V$ durch $\operatorname{grad} UV - V \operatorname{grad} U$ ersetzt, so daß man statt (3′) bekommt

$$4\pi U e^{i\nu t} = \int \left(do, \operatorname{grad} \frac{U e^{i(\nu t + \sqrt{a}r)}}{r} - \frac{2}{r} \operatorname{grad} U e^{i\nu t}\Big|_{t+\sqrt{a}r}\right), \qquad (3'')$$

wird dabei wohl bemerkt worden sein.

In Wahrheit hat das H.-K.sche Prinzip mit dem Interferenz-Prinzip gar nichts gemein. Der Oberflächensatz beruht, wenn wir seine Herleitung prüfen, lediglich auf der Existenz einer Wellengleichung von der Form (2), auf dem eigentümlichen Verhalten von $\operatorname{div} \operatorname{grad} 1/r$ im Pol sowie auf dem Prinzip der störungsfreien Überlagerung. Daher kommt es auch, daß die Funktion $V = \sin(\sqrt{a}r)/r$, obgleich sie die Wellengleichung (2) befriedigt, doch nicht verwendet werden kann, eben weil sie die zweite Voraussetzung nicht erfüllen kann. Daher kommt es ferner, daß für U-Wellen, die wie die hydrodynamischen das Prinzip der störungsfreien Überlagerung nicht befolgen, der H.-K.sche Satz keine Verwendung finden kann.

Zu seinen Voraussetzungen gehört offenbar nicht gerade eine Kugelwelle. Denken wir uns in (3) statt der Kugelwellenfunktion $e^{i\sqrt{a}r}/r$ irgendeine andere einpolige Wellenfunktion, die mit der U-Welle gleiche Schwingungsform hat sowie derselben Wellengleichung (2) genügt und außerdem sich im Pol wie $1/r$ verhält, eingesetzt, so haben wir die allgemeinste Form des H.-K.schen Oberflächensatzes.

Der Bau der Hilfswelle außerhalb ihres Pols ist beliebig. Die Phasen können also auf beliebig gekrümmten Bahnen vom oder zum Pol laufen; es braucht auch keine physikalische Welle zu sein. Es könnte beispielsweise eine exzentrische Kugelwelle sein. Allein schon diese durch die Verallgemeinerung möglich gewordene Erkenntnis feit uns gegen die Auffassung, daß irgendwelche gedachte Quellpunkte Elementarwellen, die doch in homogenen Körpern nur Kugelwellen sein könnten, ins Spiel kämen.

Das Huygens-Kirchhoffsche Verfahren und seine Verallgemeinerung ist ein Kunstgriff, der darin besteht, daß über die zu berechnende U-Welle eine einpolige Welle überlagert gedacht wird, mit deren Hilfe dann die U-Welle im

Pol angebbar ist, wenn beide an einer Oberfläche bekannt sind.

U kann natürlich auch einen Wellenzustand darstellen, d. h. die Überlagerung mehrerer Wellen gleicher Schwingungsform.

Auch bei Temperaturwellen sowie bei Flüssigkeits-Scherungswellen kann das H.-K.sche Verfahren angewendet werden. Denn sie befolgen die drei genannten Voraussetzungen. Daß bei ihnen der Wellenparameter a anders zusammengesetzt ist wie beispielsweise bei Verdünnungswellen, ist kein Hinderungsgrund.

Für räumlich variierende a bleibt das H.-K.sche Verfahren zu Recht bestehen. Indessen läßt sich das nicht für die Berechnung der Wellenbewegung in inhomogenen Körpern verwerten, und zwar weil in solchen die Wellengleichung keineswegs die einfache Form (2) hat.

Es sind noch andere Oberflächensätze denkbar, die nicht auf Überlagerung einer Hilfswelle beruhen.

Man kann bekanntlich einen Vektor $\mathfrak{V}$, falls er sich mit seinen ersten Ableitungen regulär verhält, in einem beliebigen Punkte seines Feldes darstellen durch die Werte von $\mathfrak{V}$, div $\mathfrak{V}$ und rot $\mathfrak{V}$ an bzw. innerhalb einer einfach zusammenhängenden Oberfläche O, die der einzigen Bedingung unterworfen ist, daß sie den Aufpunkt umschließt. Der Wert von $\mathfrak{V}$ im Aufpunkt erscheint dann in Form gewisser Raum- und Oberflächenintegrale[1]). Dieser Satz wird gewonnen durch die Verbindung des Vektors mit dem Skalar $1/r$ und Verwertung einer Eigenschaft des Topographen $\mathfrak{r}$. Für eine unendlich kleine Kugel, die den Aufpunkt umschließt, konvergiert nämlich $\int dv \cdot \mathfrak{V}$ div grad $1/r$ gegen $-4\pi\mathfrak{V}$, und ferner lassen sich Verschiebungen des Endpunktes von $\mathfrak{r}$ ersetzen durch die entgegengesetzten seines Anfangspunktes, des Aufpunktes. Die Zeit nun spielt in diesem rein geometrischen Satz keine Rolle. Tritt sie in $\mathfrak{V}$ auf, so ist sie als Parameter anzusehen, der konstant zu halten ist. Es kommen also in nichtstationären Feldern, in Wellen, nur gleichzeitige Werte der Beträge in Rechnung.

Es steht aber nichts im Wege und erscheint aussichtsvoll, den Satz zu erweitern, indem man $\mathfrak{V}$ nicht nur vom Ort abhängen läßt, sondern auch noch von einem skalaren Parameter, der Raum und Zeit in beliebiger gesetzmäßiger Verbindung enthält. Die Ersetzung von $\mathfrak{V}(\mathfrak{r})$ durch $\mathfrak{V}(\mathfrak{r}, t')$, worin $t' = f(t, \mathfrak{r})$ der Zeit-Raumparameter sei, macht gewisse Umformungen in den Gliedern des Satzes notwendig, die aber immer ausführbar sind, und weiter läßt sich immer im Aufpunkt $t' = t$ machen. In dieser Erweiterung liefern nun zu dem Werte $\mathfrak{V}(o, t)$ die einzelnen Feldpunkte an und innerhalb O nicht mehr gleichzeitige Beiträge, sondern je nach ihrer Lage ungleichzeitige, vergangene oder zukünftige Werte in bezug auf den Zeitpunkt t, ganz nach dem gesetzlichen Zusammenhang, der zwischen Zeit und Lage in dem Parameter t' angesetzt ist.

Durch diese Umformungen treten zeitliche Ableitungen von $\mathfrak{V}$ unter den Integralen auf. Man kommt dadurch auf den Gedanken, daß nach Aufstellung gewisser Vorschriften solche Funktionen $f(t, \mathfrak{r})$ existieren, durch deren Einführung die Raumintegrale zusammengezogen werden zu einem, dessen Integrand gerade die Form derjenigen Wellengleichung annimmt, der $\mathfrak{V}$ zu genügen hat. Dann würde $\mathfrak{V}(o, t)$ allein durch Oberflächenintegrale bestimmbar sein, was ja die mindeste Voraussetzung für die Verwendbarkeit der Methode wäre. Ob eine solche Funktion stets existiert, ist eine offene Frage; jedenfalls muß sie in Beziehung stehen zu der Form der jeweiligen Wellengleichung. Soviel ist aber seit der Auffindung des Interferenz-Prinzips gewiß: die Einführung des Parameters t' erlaubt nicht, die Elementarbeiträge der Integrale als Elementarwellen aufzufassen, die von den Raum- und Oberflächenpunkten auslaufen und untereinander interferieren. Es handelt sich in Wirklichkeit nur um eine rein rechnerische Verteilung der Beiträge. Ganz entsprechende Betrachtungen gelten natürlich auch für Skalarwellen.

Bisher ist es nur in einem besonderen Fall gelungen diejenige Funktion t' anzugeben, welche die Raumintegrale zum Verschwinden bringt. Befolgt das Vektorfeld die Wellengleichung $d^2\mathfrak{V}/dt^2 + \omega \operatorname{rot}^2 \mathfrak{V} = 0$, worin ω eine Konstante ist, dann liefert der Ansatz: $t' - t$ proportional dem Abstand r, in Verbindung mit gewissen Vorschriften, wirklich nur Oberflächenintegrale zur Bestimmung von $\mathfrak{V}(o, t)$.

Das skizzierte Parameter-Verfahren ist, wie man sieht, von dem Huygens-Kirchhoffschen im Wesen verschieden. Es ist allgemeiner, weil es nicht auf die Wellengleichung (2) beschränkt ist, somit auch in Quellgebieten zu brauchen ist.

Gießen, Februar 1917.

(Eingegangen 28. Februar 1917.)

1) Siehe z. B. Ignatowsky, Vektoranalysis I, Nr. 17. (Teubner, Leipzig 1909.)

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

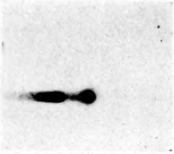

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

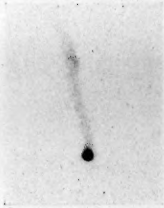

Fig. 6.